2. ПРЕДЕЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ

2.1. Понятие предельного значения функции

План

1. Предельное значение (предел) функции
2. Правый (левый) предел функции
3. Предел функции при $x \to \infty$
4. Предел функции при стремлении x к положительной (отрицательной) бесконечности
5. Бесконечно малая функция (справа/слева)
6. Бесконечно большая функция (справа/слева)
7. Бесконечно малые функции более высокого порядка, одного порядка, эквивалентные
8. Бесконечно большие функции более высокого порядка роста, одного порядка роста
9. Теорема о пределах суммы (разности), произведения и частного двух функций
10. Утверждение о пределах полиномов и несократимых алгебраических дробей

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определённую на некотором множестве $\{x\}$, и точку a, быть может и не принадлежащую $\{x\}$, но обладающую тем свойством, что в любой ε-окрестности точки a имеются точки $\{x\}$, отличные от a. Например, точка a может быть граничной точкой интервала, на котором определена функция.

Число b называется **предельным значением функции** $y = f(x)$ в точке $x = a$ (или **пределом функции** при $x \to a$), если для любой, сходящейся к a ЧП $\{x_n\}$ значений аргумента x, элементы x_n которой отличны от a $(x_n \neq a,\ \forall n)$, соответствующая ЧП $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к b.

Для обозначения предела функции используется следующая символика: $b = \lim_{x \to a} f(x)$.

Число b называется **правым (левым) предельным значением (пределом справа или слева) функции** $y = f(x)$ в точке $x = a$, если для любой, сходящейся к a ЧП $\{x_n\}$ значений аргумента x, элементы x_n которой больше (меньше) a, соответствующая ЧП $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к b.

Для предела справа используется обозначение:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = b \quad \text{или} \quad f(a+0) = b,$$

для левого:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = b \quad \text{или} \quad f(a-0) = b.$$

Правый и левый пределы называют **односторонними**.

Замечание. Если в точке a пределы функции $f(x)$ справа и слева равны, то в точке a существует предел этой функции, равный указанным односторонним пределам.

Действительно, пусть $\{x_n\}$ – любая сходящаяся к a ЧП, элементы которой $x_n \neq a$ $(\forall n)$. Пусть $\{x_{k_m}\}$ – подпоследовательность этой ЧП такая, что все $x_{k_m} > a$, $\{x_{l_m}\}$ – подпоследовательность, состоящая из элементов $x_{l_m} < a$ $(\forall m)$. Так как $\{x_{k_m}\}$ и $\{x_{l_m}\}$ сходятся к a, то из существования правого и левого пределов функции $f(x)$ вытекает, что ЧП $\{f(x_{k_m})\}$ и $\{f(x_{l_m})\}$ имеют по условию равные пределы. Обозначим через b предел этих ЧП. Для любого $\varepsilon > 0$ можно указать номер N такой, что при $k_m \geq N$ и $l_m \geq N$ удовлетворяются неравенства:

$$|f(x_{k_m}) - b| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |f(x_{l_m}) - b| < \varepsilon.$$

Значит, при $n \geq N$: $|f(x_n) - b| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Число b называется **предельным значением функции** $y = f(x)$ при $x \to \infty$ (или **пределом функции** $f(x)$ при $x \to \infty$), если для любой ББЧП значений аргумента соответствующая ЧП значений функции сходится к b:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b.$$

Число b называется **предельным значением (пределом) функции** $y = f(x)$ при стремлении x к положительной (отрицательной) бесконечности, если для любой ББЧП значений аргумента x, элементы которой, начиная с некоторого номера, положительны (отрицательны), соответствующая ЧП значений функции сходится к b:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \quad (\lim_{x\to-\infty} f(x) = b).$$

Следующая теорема доказывает, что арифметические операции над функциями, имеющими предел в точке a, приводят к функциям, имеющим соответствующие этим операциям пределы в точке a:

Теорема 2.1. Пусть заданные на одном и том же множестве функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке a пределы b и c. Тогда функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ и $f(x)/g(x)$ имеют в точке a пределы, равные соответственно $b \pm c,\ b \cdot c,\ b/c\ (c \neq 0)$.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ – произвольная сходящаяся к a ЧП $(x_n \neq a)$. Соответствующие ЧП $\{f(x_n)\}$, $\{g(x_n)\}$ имеют в точке a пределы b и c. Но тогда, в силу теорем 1.9–12, ЧП $\{f(x_n) \pm g(x_n)\}$, $\{f(x_n) \cdot g(x_n)\}$ и $\{f(x_n)/g(x_n)\}$ имеют пределы, соответственно равные $b \pm c,\ b \cdot c,\ b/c\ (c \neq 0)$. Вследствие произвольности ЧП $\{x_n\}$ ука-

занные пределы являются пределами функций, образованных данными арифметическими операциями. Теорема доказана.

Из теоремы 2.1 вытекает следующее утверждение: в каждой точке a непрерывного множества $\{x\}$ пределы многочленов и несократимых алгебраических дробей существуют и равны частным значениям этих функций в точке a (в случае алгебраической дроби число a не должно быть корнем знаменателя).

В общем виде это утверждение можно записать так:

$$\lim_{x\to a}\frac{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_1x+b_0}{c_mx^m+c_{m-1}x^{m-1}+\ldots+c_1x+c_0}=\frac{b_na^n+b_{n-1}a^{n-1}+\ldots+b_1a+b_0}{c_ma^m+c_{m-1}a^{m-1}+\ldots+c_1a+c_0}.$$

2.2. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Функция $y=f(x)$ называется **бесконечно малой** в точке a (при $x\to a$), если $\lim_{x\to a}f(x)=0$.

Очевидно, что если функция $y=f(x)$ имеет в точке a предел, равный b, то функция $\alpha(x)=f(x)-b$ является бесконечно малой в точке a. Следовательно, такая функция $f(x)$ может быть представлена в виде: $f(x)=b+\alpha(x)$, где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to a$.

Функция $y=f(x)$ называется **бесконечно большой** в точке a справа (слева), если для любой сходящейся к a ЧП $\{x_n\}$, элементы которой больше (меньше) a, соответствующая ЧП $\{f(x_n)\}$ является ББЧП определённого знака. Для бесконечно больших функций используются следующие обозначения:

$$\lim_{x\to a\pm 0}f(x)=+\infty \quad \text{или} \quad f(a\pm 0)=+\infty,$$
$$\lim_{x\to a\pm 0}f(x)=-\infty \quad \text{или} \quad f(a\pm 0)=-\infty.$$

Пусть $\alpha(x),\beta(x)$ – две бесконечно малые в точке a функции, заданные на одном и том же множестве $\{x\}$. Тогда:

1) $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой более высокого порядка**, чем $\beta(x)$, если $\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$;

2) функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **бесконечно малыми одного порядка**, если существует предел $\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\neq 0$;

3) функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **эквивалентными бесконечно малыми**, если $\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$.

Обычно бесконечно малые функции сравнивают с какими-либо стандартными бесконечно малыми функциями; часто в качестве функ-

ции сравнения берут $(x-a)^m$, где m – целое положительное число. Говорят, что функция $\alpha(x)$ имеет порядок малости m, если

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{(x-a)^m}\neq 0.$$

Если функция $\alpha(x)$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем $\beta(x)$, то это записывают так: $\alpha = o(\beta)$, где o символизирует функцию, которая является бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с $\beta(x)$ в точке a (читается: «α равно o малое от β»). Таким образом, символ $o(\beta)$ означает любую бесконечно малую функцию, имеющую в точке a более высокий порядок малости, чем $\beta(x)$. Отметим следующие очевидные свойства символа o: если $\gamma = o(\beta)$, то

$$o(\beta)\pm o(\gamma) = o(\beta),\quad o(\beta)\pm o(\beta) = o(\beta).$$

Для бесконечно больших в точке a справа (слева) функций $A(x)$ и $B(x)$ используется аналогичная методика сравнения. Пусть, например, $A(x)$ и $B(x)$ есть бесконечно большие в точке a функции справа положительного знака, то есть

$$\lim_{x\to a+0} A(x) = +\infty,\qquad \lim_{x\to a+0} B(x) = +\infty.$$

Говорят, что $A(x)$ имеет в точке a справа **более высокий порядок роста**, чем $B(x)$, если $\lim_{x\to a+0} A(x)/B(x) = +\infty$.

Если же $\lim_{x\to a+0} A(x)/B(x) = c$, где $0 < c < \infty$, то говорят, что $A(x)$ и $B(x)$ имеют в точке a справа **одинаковый порядок роста**.

Основная литература:

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. В 2-х ч. Часть I. Учеб.: Для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 648 с.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. В 2-х ч. Часть II. Учеб.: Для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 448 с.
3. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Уч. пособие. – СПб., Изд-во «Профессия», 2005. – 432 с.

Дополнительная литература:

1. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т. 1,2,3. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
2. Никольский С.М. Курс математического анализа. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 592 с.
3. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. Уч. пособие для вузов. – М.: Наука, 1989. – 656 с.